

Maak elke opgave op een apart vel, voorzien van je naam.

Op vel 1: naam, studentnummer, adres, postcode, woonplaats en studierichting.

De onderdelen van een opgave zijn meestal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Als je een bepaald onderdeel niet kunt oplossen probeer dan toch het vervolg van de opgave

1. Een staaf met een te verwaarlozen massa heeft een lengte van $2b$ meter en is in het midden draaibaar vastgemaakt aan een horizontale pen. Aan één uiteinde van de staaf wordt een massa m bevestigd. Aan de andere kant van het draaipunt wordt op een afstand van a meter, waarvoor geldt dat a kleiner is dan b , eveneens een massa m bevestigd. Het geheel vormt nu een slinger met een zeker traagheidsmoment. De hoek tussen de staaf en de verticaal door het draaipunt is θ .

Kies als assenstelsel een oorsprong in het draaipunt, de e_1 -as langs de staaf omlaag, en de e_3 -as loodrecht het papier uit. Daarmee ligt ook de e_2 -as vast.

De elementen van een traagheidstensor kunnen bepaald worden met de volgende relatie:

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} \cdot x_{\alpha,j})$$

- Bereken de elementen van de traagheidstensor van de hierboven beschreven slinger.
- Toon aan dat het impulsmoment gelijk is aan $L_3 = (m \cdot b^2 + m \cdot a^2) \theta e_3$
- Bereken het krachtmoment op deze slinger.
- Bereken de ω_0 van de uit te voeren slingeren.

Door de massa die op een afstand van a meter van het draaipunt zit te verschuiven zal de ω_0 veranderen.

- Geef in een grafiek het verloop van ω_0^2 tegen de afstand a , als die varieert van 0 tot b meter.

2. Een ruimteschip met een massa van 10.000 kg draait in een cirkelvormige baan om de aarde op een hoogte van 200 km boven het aardoppervlak. Deze satelliet moet vanuit deze baan in een geostationaire baan gebracht worden. Als we afzien van de verandering van de massa door het verbruik van brandstof tijdens de overgang naar de nieuwe baan blijft nog de volgende vraag:

- bereken de minimale energie die nodig is om het ruimteschip in de geostationaire baan te brengen

Gegeven: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, $M_{\text{aarde}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_{\text{aarde}} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Om van een cirkelvormige 'parkeerbaan' met straal r_1 in een andere cirkelvormige grotere baan met straal r_2 te komen moet via een ellipsachtige baan de oversteek gemaakt worden. Bij het vertrek uit de parkeerbaan moet de boordcomputer de motor sturen.

- Geef in een formule aan welke stoot de raketmotor moet leveren om dit vertrek mogelijk te maken. Druk deze stoot uit in r_1 , r_2 , G , M_{aarde} en m . Verwaarloos wederom de massaverandering door het brandstofverbruik.

3. In de onderste helft van een holle cilinder met een inwendige kromtestraal R rolt een massieve bal, met straal ρ en massa m , heen en weer, loodrecht op de as van de cilinder.
De bal rolt en glijdt niet.
- Toon aan dat het traagheidsmoment van de bal $\frac{2}{5} m \cdot \rho^2$ is.
 - Toon aan dat $(R - \rho)\theta = \rho \cdot \phi$.
 - Bepaal de bewegingsvergelijking van Lagrange en elimineer ϕ door gebruik te maken van de relatie zoals gegeven onder b.
 - Bereken de frequentie voor kleine oscillaties.
4. Zoals bekend is de gravitatiekracht omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand van de zwaartepunten van twee lichamen.
Veronderstel nu eens dat de gravitatiekracht een vorm had waarin hij evenredig was met de afstand van de zwaartepunten. Is het dan mogelijk dat:
- om een hemellichaam als de aarde een maan draait,
 - zo'n maan een ellipsbaan beschrijft,
 - er voor verschillende manen verschillende omlooptijden gelden,
 - zonder raket weer veilig teruggekomen kan worden van een maanreis.
- Geef van alle alternatieven aan of het mogelijk is of niet en geef er een duidelijke toelichting bij.

Puntenverdeling

Opg.1: 1a 2, 1b 2, 1c 2, 1d 2, 1e 2.

Opg.3: 3a 2, 3b 2, 3c 3, 3d 2

Opg.2: 2a 5, 2b 4.

Opg.4: 4a 2, 4b 2, 4c 2, 4d 2.